**Сборник тренировочных материалов для подготовки
к государственной итоговой аттестации по МАТЕМАТИКЕ
для слепых и поздноослепших обучающихся
по образовательным программам
СРЕДНЕГО общего образования**

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Тренировочные материалы предназначены для подготовки к единому государственному экзамену и государственному выпускному экзамену по математике. Задания подобраны таким образом, чтобы охватить значительную и представительную часть открытого банка заданий по математике, а также все основные разделы школьного курса математики.

Задания с кратким ответом подразумевают только числовой ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Частным случаем задания с кратким ответом является задание на установление соответствия. Ответом в таком задании служит последовательность, составленная из цифр 1, 2, 3 и 4, которая записывается в виде четырехзначного числа (без пробелов, запятых и других вспомогательных символов), например 1342 или 3241.

Другой частный случай задания с кратким ответом – задание с множественным выбором, где требуется указать одно или несколько верных утверждений из предложенного перечня. Ответом в данном случае являются номера верных утверждений, записанные в любом порядке без пробелов и других вспомогательных символов. Например, если верные утверждения имеют номера 1) и 3), то ответ может быть записан в виде 13 или 31. Каждая задача с кратким ответом снабжена полем «Ответ».

Задания с кратким ответом имеют базовый или повышенный уровень сложности.

Задания с развёрнутым ответом подразумевают полное обоснованное решение и запись ответа в произвольной форме. При выполнении заданий с развёрнутым ответом следует уделять внимание полноте и грамотности математической записи. При этом можно пользоваться без ссылок и обоснований всеми фактами, утверждениями, теоремами курса математики основной и полной средней школы (содержащихся в учебниках и учебных пособиях, допущенных или рекомендованных Министерством образования и науки РФ). Задания с развёрнутым ответом имеют повышенный или высокий уровень сложности.

Верное выполнение каждого из заданий с кратким ответом оценивается 1 баллом. Верное решение каждого из заданий с развёрнутым ответом оценивается в соответствии с критериями оценивания, разработанными для каждого задания. Критерии оценивания, а также ответы опубликованы в сопроводительных материалах к настоящему сборнику.

Задания с кратким ответом выбраны из открытых банков математических заданий для проведения итоговой аттестации и могут включаться как в экзаменационные материалы ГВЭ-11, так и в КИМ базового или профильного уровня ЕГЭ по математике.

Сборник тренировочных материалов состоит из трёх крупных тематических разделов. Внутри каждого раздела задания группируются в основном по возрастанию уровня сложности.

Раздел 1 «Алгебра и начала анализа» содержит задачи по арифметике, алгебре и началам математического анализа по курсу основной и средней школы. Раздел содержит 26 заданий с кратким ответом, а также 8 заданий с развёрнутым ответом.

Раздел 2 «Геометрия» содержит задания по курсу геометрии (планиметрии и стереометрии) основной и средней школы. Раздел содержит 14 заданий различного уровня сложности, из которых 4 задания требуют развёрнутого ответа.

Раздел 3 «Практико-ориентированные задания» содержит 26 заданий с кратким ответом базового уровня сложности, проверяющих математические умения и навыки, необходимые в повседневной жизни. Кроме того, раздел содержит 2 задания высокого уровня сложности, соответствующих нормативным документам профильного ЕГЭ по математике.

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

РАЗДЕЛ 1
Алгебра и начала анализа

Ответом к заданиям 1–26 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите значение выражения $4,5\cdot 5,4-6,1$.

Ответ: ___________________________.

2 Найдите значение выражения $\left(\frac{17}{15}-\frac{1}{12}\right)\cdot\frac{20}{3}$.

Ответ: ___________________________.

3 Найдите значение выражения $\left(2\cdot 10^{2}\right)\cdot\left(1,1\cdot 10^{-2}\right)$.

Ответ: ___________________________.

4 Найдите значение выражения $(-10)^{4}+(-10)^{2}+(-10)^{1}$.

Ответ: ___________________________.

5 Вычеркните в числе 53164185 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 12. В ответе укажите какое-либо одно такое число.

Ответ: ___________________________.

6 Найдите чётное четырёхзначное натуральное число, сумма цифр которого на 1 меньше их произведения. В ответе укажите какое-либо одно такое число.

Ответ: ___________________________.

7 Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, и на всех этажах одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме, если всего в нём 455 квартир?

Ответ: ___________________________.

8 В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

- за 3 золотых монеты получить 4 серебряных и 1 медную;
- за 6 серебряных монет получить 4 золотых и 1 медную.

У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 35 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая?

Ответ: ___________________________.

9 Чтобы перевести температуру из шкалы Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой $t_F=1,8t_C+32$, где t_C — температура в градусах по шкале Цельсия, t_F — температура в градусах по шкале Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует 30 градусов по шкале Цельсия?

Ответ: ___________________________.

10 Среднее геометрическое чисел a, b и c вычисляется по формуле $g=\sqrt[3]{abc}$. Вычислите среднее геометрическое чисел 9, 12, 16.

Ответ: ___________________________.

11 Найдите значение выражения $\frac{7\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите $\sin x$, если $\cos x=-\frac{\sqrt{15}}{4}$ и $90^\circ<x<180^\circ$.

Ответ: ___________________________.

13 Найдите значение выражения $7^{\frac{4}{9}}\cdot 49^{\frac{5}{18}}$.

Ответ: ___________________________.

14 Найдите значение выражения $\left(1-\log_{2}12\right)\left(1-\log_{6}12\right)$.

Ответ: ___________________________.

15 Найдите корень уравнения $2(3-2x)-7=-3x+8$.

Ответ: ___________________________.

16 Решите уравнение $x^2+11x=-28$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Ответ: ___________________________.

17 Найдите корень уравнения $9^{x-5}=729$.

Ответ: ___________________________.

18 Найдите корень уравнения $\log_2(4-x)=7$.

Ответ: ___________________________.

19 Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $\dfrac{(x-3)^2}{x-2}>0$

Б) $(x-2)(x-3)<0$

В) $\dfrac{x-2}{x-3}>0$

Г) $(x-2)^2(x-3)<0$

РЕШЕНИЯ

1) $x<2$ или $x>3$

2) $2<x<3$ или $x>3$

3) $2<x<3$

4) $x<2$ или $2<x<3$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий номер решения.

Ответ:

А	Б	В	Г

20 Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $\log_2 x<-2$

Б) $\log_2 x>2$

В) $\log_2 x>-2$

Г) $\log_2 x<2$

РЕШЕНИЯ

1) $0<x<4$

2) $0<x<\dfrac{1}{4}$

3) $x>\dfrac{1}{4}$

4) $x>4$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующий номер решения.

Ответ:

А	Б	В	Г

21 Первый и второй насосы наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий — за 14 минут, а первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Ответ: ___________________________.

22 Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: ___________________________.

23 Прямая $y=7x-5$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+6x-8$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ___________________________.

24 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{2}t^3-3t^2+2t$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=6$ с.

Ответ: ___________________________.

25 Найдите наименьшее значение функции $y = 5\operatorname{tg} x - 5x + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Ответ: ___________________________.

26 Найдите точку минимума функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$.

Ответ: ___________________________.

Запишите полное обоснованное решение и ответ к каждому из заданий 27–34.

27 а) Решите уравнение $6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

28 а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin^2 x = 0,75$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

29 Решите неравенство $\frac{3^x - 1}{3^x - 3} \le 1 + \frac{1}{3^x - 2}$.

30 Решите неравенство $\left(\log_2^2 x - 2\log_2 x\right)^2 + 36\log_2 x + 45 < 18\log_2^2 x$.

31 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\left(y^2 - xy + 3x - y - 6\right)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}} = 0 \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

32 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = \left|x^2 + y^2 - 1\right|, \\ y = a\left(x - 1\right) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

33 а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.

б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?

в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

34 Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

Ответы к заданиям с кратким ответом

Алгебра и начала анализа

№ задания	Ответ
1	18,2
2	7
3	2,2
4	10090
5	51648; 53148
6	1152; 1512; 5112; 1222; 2122; 2212
7	13
8	10
9	86
10	12
11	35
12	0,25
13	7
14	1
15	–9
16	–7
17	8
18	–124
19	2314
20	2431
21	8,4
22	60
23	0,5
24	20
25	6
26	1

Решения и критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

1. Алгебра и начала анализа

27 а) Решите уравнение

$$6\cos^2 x+5\sin x-2=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

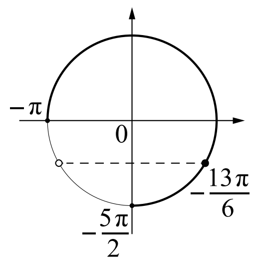
Решение.
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$6-6\sin^2 x+5\sin x-2=0;\ \left(2\sin x+1\right)\left(3\sin x-4\right)=0.$$

Значит, $\sin x=-\frac{1}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin x=\frac{4}{3}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.



Получим число $-\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{13\pi}{6}$.

28 а) Решите уравнение

$$\cos 2x+\sin^2 x=0{,}75.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

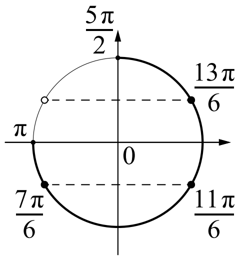
Решение.
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$1-2\sin^2 x+\sin^2 x=0{,}75;\ \left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)=0.$$

Значит, или $\sin x=-\frac{1}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$,

или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$;

$\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$.

Критерии оценивания заданий 27 и 28

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или пункте *б*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

29 Решите неравенство $\frac{3^x-1}{3^x-3}\le 1+\frac{1}{3^x-2}$.

Решение.

Пусть $t=3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t-1}{t-3}\le 1+\frac{1}{t-2};\quad \frac{t-1}{(t-2)(t-3)}\le 0,$$

откуда $t\le 1$; $2<t<3$.

При $t\le 1$ получим: $3^x\le 1$, откуда $x\le 0$.

При $2<t<3$ получим: $2<3^x<3$, откуда $\log_3 2<x<1$.

Решение исходного неравенства: $x\le 0$; $\log_3 2<x<1$.

Ответ: $(-\infty;0]$; $(\log_3 2;1)$.

30 Решите неравенство $\left(\log_2^2 x-2\log_2 x\right)^2+36\log_2 x+45<18\log_2^2 x$.

Решение.

Пусть $t=\log_2 x$, тогда неравенство примет вид:

$$\left(t^2-2t\right)^2-18\left(t^2-2t\right)+45<0;\ \left(t^2-2t-3\right)\left(t^2-2t-15\right)<0;$$

$$(t-3)(t+1)(t-5)(t+3)<0,$$

откуда $-3<t<-1$; $3<t<5$.

При $-3<t<-1$ получим: $-3<\log_2 x<-1$, откуда $\frac{1}{8}<x<\frac{1}{2}$.

При $3<t<5$ получим: $3<\log_2 x<5$, откуда $8<x<32$.

Решение исходного неравенства: $\frac{1}{8}<x<\frac{1}{2}$; $8<x<32$.

Ответ: $\left(\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right)$; $(8;32)$.

Критерии оценивания заданий 29 и 30

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного включением граничных точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

31 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\frac{\left(y^2-xy+3x-y-6\right)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}}=0,\\ x+y-a=0\end{cases}$$

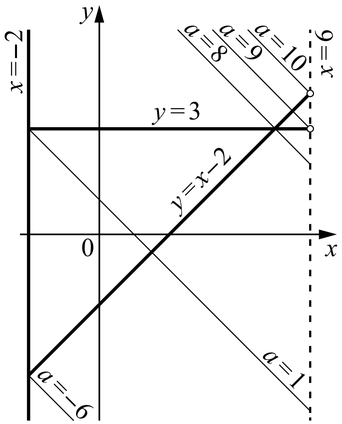
имеет ровно два различных решения.

Решение.

Запишем первое уравнение в виде

$$\frac{(y-3)(y+2-x)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}}=0.$$

При $x<-2$ и $x \geq 6$ левая часть не имеет смысла. При $-2 \leq x < 6$ уравнение задаёт прямые $y=3$, $y=x-2$, $x=-2$ (см. рисунок).



При каждом значении a уравнение $x+y-a=0$ задаёт прямую, параллельную прямой $x+y=0$ или совпадающую с ней. При $-2 \leq x < 6$ такая прямая пересекает прямую $y=3$ при $1 \leq a < 9$, пересекает прямую $y=x-2$ при $-6 \leq a < 10$, пересекает прямую $x=-2$ при любом значении a. При этом прямые $x+y-a=0$ проходят через точки пересечения прямых $x=-2$, $y=3$ и $y=x-2$ при $a=-6$, $a=1$ и $a=8$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямых $y=3$, $y=x-2$, $x=-2$ с прямой $x+y-a=0$ при условии $-2 \leq x < 6$. Таким образом, исходная система имеет ровно два решения при $-6 < a \leq 1$; $a=8$; $9 \leq a < 10$.

Ответ: $-6 < a \leq 1$; $a=8$; $9 \leq a < 10$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением точек $a=10$ и/или $a=9$	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений a: $(-6;1]$ или $[9;10)$, возможно, с включением/исключением граничных точек	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямых (аналитически или графически), ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

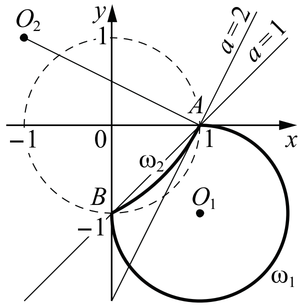
32 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x-2y-2=\left|x^2+y^2-1\right|, \\ y=a(x-1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.



Рассмотрим два случая.

1) Если $x^2+y^2 \geq 1$, то получаем уравнение

$$2x-2y-2=x^2+y^2-1;$$

$$x^2-2x+y^2+2y+1=0;$$

$$(x-1)^2+(y+1)^2=1.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1(1;-1)$ и радиусом 1.

2) Если $x^2+y^2 \leq 1$, то получаем уравнение

$$2x-2y-2=1-x^2-y^2;\ x^2+2x+y^2-2y-3=0;\ (x+1)^2+(y-1)^2=5.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_2(-1;1)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

Полученные окружности пересекаются в двух точках — $A(1;0)$ и $B(0;-1)$, лежащих на окружности $x^2+y^2=1$, поэтому в первом случае получаем дугу ω_1 с концами в точках A и B, во втором — дугу ω_2 с концами в тех же точках (см. рисунок).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, которая проходит через точку A и угловой коэффициент которой равен a.

При $a=1$ прямая m проходит через точки A и B, то есть исходная система имеет два решения.

При $a=2$ прямая m перпендикулярна прямой O_2A, угловой коэффициент которой равен $-\frac{1}{2}$, значит, прямая m касается дуги ω_2 в точке A и пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых — точка A), то есть исходная система имеет два решения.

При $1 < a < 2$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке A и ещё в одной точке, отличной от точки B, то есть исходная система имеет три решения.
При $0 \le a < 1$ прямая m не пересекает дуги ω_1 и ω_2 в точках, отличных от точки A, то есть исходная система имеет одно решение.
При $a < 0$ или $a > 2$ прямая m пересекает дугу ω_1 в двух точках и не пересекает дугу ω_2 в точках, отличных от точки A, то есть исходная система имеет два решения.
Значит, исходная система имеет более двух решений при $1 < a < 2$.
Ответ: $1 < a < 2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого только включением точки $a = 1$	3
При всех значениях *a* верно найдено количество решений системы в одном из двух случаев, возникающих при раскрытии модуля	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически), ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

33 а) Приведите пример четырёхзначного числа, произведение цифр которого в 10 раз больше суммы цифр этого числа.
б) Существует ли такое четырёхзначное число, произведение цифр которого в 175 раз больше суммы цифр этого числа?
в) Найдите все четырёхзначные числа, произведение цифр которых в 50 раз больше суммы цифр этого числа.

Решение.
а) Произведение цифр числа 2529 равно 180, а сумма цифр равна 18, то есть в 10 раз меньше.
б) Предположим, что такое число n существует и a, b, c, d — его цифры. Заметим, что среди этих цифр не может быть нулей, так как иначе их произведение было бы равно нулю. Имеем: $abcd = 175(a+b+c+d)$. Правая часть этого равенства делится на 25, поэтому среди цифр найдутся две цифры «5». Так как при перестановке местами цифр числа n равенство

$abcd = 175(a+b+c+d)$ остаётся верным, то без ограничения общности можно считать, что в числе n цифры c и d равны 5.
Тогда $ab = 7(a+b+10) \ge 7 \cdot 12 > 9 \cdot 9 \ge ab$. Получаем противоречие.
в) Предположим, что такое число n существует и a, b, c, d — его цифры. Как и ранее, заметим, что среди этих цифр не может быть нулей, так как иначе их произведение было бы равно нулю. Имеем: $abcd = 50(a+b+c+d)$. Правая часть этого равенства делится на 25, поэтому среди цифр найдутся две цифры «5». Без ограничения общности будем считать, что $c = d = 5$.
Тогда $ab = 2(a+b+10)$. Так как правая часть последнего равенства делится на 2, то либо a, либо b делится на 2. Будем считать, что на 2 делится b.
Если $b = 2$, то $a = a + 12$, что невозможно.
Если $b = 4$, то $2a = a + 14$; $a = 14$, что невозможно.
Если $b = 6$, то $3a = a + 16$; $2a = 16$; $a = 8$. Число $n = 8655$ и все числа, получаемые из него перестановкой цифр, удовлетворяют условию задачи.
Если $b = 8$, то $4a = a + 18$; $3a = 18$; $a = 6$. Этот вариант также получается из предыдущего перестановкой цифр.
Ответ: а) например, 2529; б) нет; в) Число 8655 и все числа, получаемые из него перестановкой цифр (всего 12 чисел).

34 Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу).
а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?
б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических?
в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх средних арифметических.

Решение.
а) Например, для групп $\{2, 3, 16\}$ и $\{6, 8\}$ средние значения совпадают и равны 7.
б) Допустим, что это возможно. Пусть все средние значения равны c. В каждой группе от 1 до 8 натуральных чисел, поэтому $c = \frac{a}{b}$, где a — натуральное число и $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Пусть группы состоят из n, m и k чисел. Тогда суммы чисел в группах равны nc, mc и kc соответственно, а общая сумма всех 10 чисел равна 61 и равна $(n+m+k)c = 10c$. Поэтому $10c = 61$; $c = \frac{61}{10}$. Это противоречит тому, что знаменатель числа c не превосходит 8.

в) Пусть группы состоят из n, m и k чисел, а средние значения равны c_1, c_2 и c_3 соответственно. Если $c_1 < 6{,}1$, $c_2 < 6{,}1$, $c_3 < 6{,}1$, то

$$nc_1 + mc_2 + kc_3 < (n+m+k)\cdot 6{,}1 = 61,$$

что противоречит условию. Значит, хотя бы одно из чисел c_1, c_2, c_3 не меньше 6,1. Поэтому максимальное из этих чисел не меньше 6,1. При этом каждое из этих чисел имеет вид $c = \frac{a}{b}$, где a — натуральное число и $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, поэтому максимальное из этих чисел не меньше $6\frac{1}{8}$.

Покажем, что максимальное из этих чисел не может равняться $6\frac{1}{8}$. Пусть $c_1 = 6\frac{1}{8}$. Тогда первая группа состоит из 8 чисел, сумма которых равна $49 = 61 - 12$. Значит, каждая из других двух групп состоит из одного числа, причём сумма двух чисел из второй и третьей групп равна 12. Но тогда одно из этих чисел больше 6, поэтому максимальное среднее больше $6\frac{1}{8}$. Получаем, что максимальное из чисел c_1, c_2, c_3 не меньше $6\frac{1}{7}$.

Покажем, что максимальное из чисел c_1, c_2, c_3 может равняться $6\frac{1}{7}$. Например, для разбиения на группы $\{6\}$, $\{4, 8\}$, $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 16\}$ получаем: $c_1 = c_2 = 6$, $c_3 = 6\frac{1}{7}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $6\frac{1}{7}$.

Критерии оценивания заданий 33 и 34

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

РАЗДЕЛ 2
Геометрия

Ответом к заданиям 1–10 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 6), (9; 6), (9; 9).

Ответ: ___________________________.

2 Найдите длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты (2; 1), (2; 4), (6; 1), (6; 4).

Ответ: ___________________________.

3 В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны $AB = BC = 15$, медиана $BM = 9$. Найдите $\cos\angle BAC$.

Ответ: ___________________________.

4 Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна $\sqrt{13}$, а один из катетов равен 3.

Ответ: ___________________________.

5 В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\operatorname{tg} A = \frac{7}{24}$. Найдите $\cos B$.

Ответ: ___________________________.

6 Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 12, а угол между ними равен 30°.

Ответ: ___________________________.

7 Аквариум размерами 80 см × 30 см × 40 см имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Сколько литров составляет объём аквариума, если в одном литре 1000 см^3?

Ответ: ____________________________.

8 Уровень воды в сосуде цилиндрической формы достигает $h = 10$ см. На каком уровне окажется вода, если её перелить в другой цилиндрический сосуд, у которого радиус основания вдвое меньше, чем у первого? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: ____________________________.

9 Два ребра прямоугольного параллелепипеда равны 8 и 5, а объём параллелепипеда равен 280. Найдите площадь поверхности этого параллелепипеда.

Ответ: ____________________________.

10 Даны два шара с радиусами 5 и 1. Во сколько раз объём большего шара больше объёма другого?

Ответ: ____________________________.

Запишите полное обоснованное решение и ответ к каждому из заданий 11–14.

11 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2:1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

12 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

13 Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает большее основание AD в точке H, точка Q — середина CD.

а) Докажите, что четырёхугольник $DQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите AD, если $\angle BAD = 75°$ и $BC = 1$.

14 Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.

б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM : MC = 1:3$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 18.

Ответы к заданиям с кратким ответом

Геометрия

№ задания	Ответ
1	12
2	5
3	0,8
4	3
5	0,28
6	24
7	96
8	40
9	262
10	125

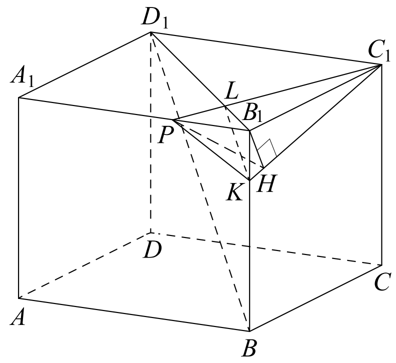
Решения и критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

11 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P:PB_1=2:1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

Решение.



а) Проведём через точку K прямую, параллельную BD_1. Пусть эта прямая пересекает плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$ в точке L. Прямая KL лежит в плоскости BB_1D_1, значит, точка L лежит на диагонали B_1D_1. Более того, $B_1L:LD_1=B_1K:KB=1:3$.

Прямая C_1L пересекает ребро A_1B_1 в точке P, принадлежащей плоскости α. Треугольники B_1LP и D_1LC_1 подобны, поэтому $B_1P:D_1C_1=B_1L:D_1L=1:3$. Значит, $A_1P:PB_1=2:1$.

б) Опустим из точки B_1 перпендикуляр B_1H на C_1K. По теореме о трёх перпендикулярах прямые PH и C_1K перпендикулярны. Значит, угол B_1HP искомый. Поскольку $A_1P:PB_1=2:1$, получаем $PB_1=\frac{4}{3}$. В прямоугольном треугольнике B_1C_1K:

$$B_1H=\frac{B_1C_1\cdot B_1K}{C_1K}=\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Значит, $\operatorname{tg}\angle B_1HP=\frac{PB_1}{B_1H}=\frac{\sqrt{17}}{3}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}}{3}$.

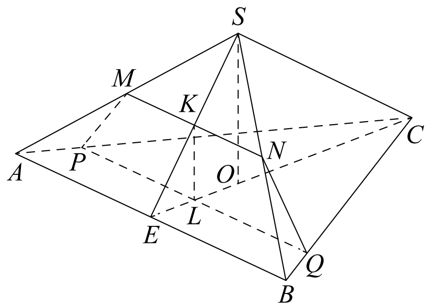
12 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 60, а боковое ребро SA равно 37. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

Решение.

а) Прямая MN параллельна плоскости ABC, поэтому сечение пересекает плоскость ABC по прямой PQ, параллельной MN. Рассмотрим плоскость SCE. Пусть K — точка пересечения этой плоскости и прямой MN, L — точка пересечения этой плоскости и прямой PQ, O — центр основания пирамиды. Плоскости SCE и MNQ перпендикулярны плоскости ABC, поэтому прямая KL перпендикулярна плоскости ABC, а значит, параллельна прямой SO. Поскольку MN — средняя линия треугольника ASB, точка K является серединой ES. Следовательно, L — середина EO. Медиана CE треугольника ABC делится точкой O в отношении $2:1$. Значит, $CL:LE = 5:1$.



б) Прямая CE перпендикулярна KL и PQ, поэтому прямая CE перпендикулярна плоскости MNQ. Прямые AB и PQ параллельны, значит, расстояние от вершины A до плоскости сечения равно расстоянию от точки E до плоскости сечения, то есть $EL = \frac{CE}{6} = 5\sqrt{3}$.

Ответ: б) $5\sqrt{3}$.

Критерии оценивания заданий 11 и 12

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

13 Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает большее основание AD в точке H, точка Q — середина CD.

а) Докажите, что четырёхугольник $DQOH$ — параллелограмм.

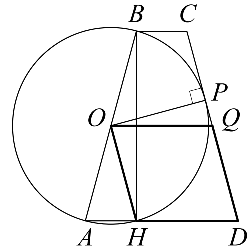
б) Найдите AD, если $\angle BAD = 75^\circ$ и $BC = 1$.

Решение.

а) Треугольник AOH равнобедренный, и трапеция $ABCD$ равнобедренная, поэтому

$$\angle AHO = \angle OAH = \angle CDA.$$

Значит, прямые OH и CD параллельны, а так как OQ — средняя линия трапеции, то параллельны прямые OQ и AD. Противоположные стороны четырёхугольника $DQOH$ попарно параллельны, следовательно, $DQOH$ — параллелограмм.



б) Пусть окружность с центром в точке O радиусом R касается стороны CD в точке P. В прямоугольных треугольниках OPQ и AHB:

$$OQ = \frac{OP}{\sin\angle OQP} = \frac{R}{\sin 75^\circ},\ AH = AB\cos\angle BAH = 2R\cos 75^\circ.$$

Поэтому

$$\frac{AH}{DH} = \frac{AH}{OQ} = \frac{2R\cos 75^\circ}{\frac{R}{\sin 75^\circ}} = 2\sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}.$$

Пусть $AH = x$. Поскольку трапеция $ABCD$ равнобедренная,

$$AD = 2AH + BC;\ DH = AH + BC = x + 1.$$

Тогда

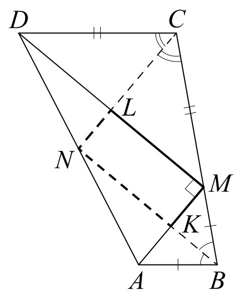
$$\frac{AH}{DH} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2},$$

откуда $x = 1$. Значит, $AD = 2x + 1 = 3$.

Ответ: б) 3.

14 Точка M лежит на стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём B и C — вершины равнобедренных треугольников с основаниями AM и DM соответственно, а прямые AM и MD перпендикулярны.
а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.
б) Пусть N — точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $BM:MC=1:3$, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых AM, DM, BN и CN, равна 18.

Решение.
а) Пусть K — середина отрезка AM. Треугольник AMB равнобедренный, поэтому отрезок BK является в нём медианой, биссектрисой и высотой. Поскольку прямые DM и AM перпендикулярны, прямая KB содержит среднюю линию треугольника AMD, то есть проходит через середину стороны AD. Аналогично, биссектриса угла MCD тоже проходит через середину стороны AD. Следовательно, биссектрисы углов B и C четырёхугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD.



б) Пусть прямые AM и BN пересекаются в точке K, а прямые DM и CN — в точке L. Тогда четырёхугольник $KMLN$ — прямоугольник. Площадь треугольника AMB равна

$$S_{ABM}=BK\cdot KM=\frac{BM}{MC}\cdot NK\cdot KM=\frac{1}{3}S_{KMLN}=6.$$

Аналогично, $S_{DCM}=54$. Площадь треугольника DMA равна

$$S_{DMA}=\frac{1}{2}\cdot AM\cdot DM=2\cdot KM\cdot LM=2S_{KMLN}=36.$$

Тогда

$$S_{ABCD}=S_{DMA}+S_{AMB}+S_{DMC}=36+6+54=96.$$

Ответ: б) 96.

Критерии оценивания заданий 13 и 14

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а,* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б,* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

РАЗДЕЛ 3
Практико-ориентированные задания

Ответом к заданиям 1–26 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы. Единицы измерений писать не нужно.

1 На бензоколонке 1 литр бензина стоит 34 руб. 20 коп. Водитель залил в бак 15 литров бензина и взял бутылку воды за 29 рублей. Сколько рублей сдачи он получит с 1000 рублей?

Ответ: ___________________________.

2 В квартире установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). Показания счётчика 1 апреля составляли 127 куб. м воды, а 1 мая — 143 куб. м. Сколько нужно заплатить за холодную воду за апрель, если стоимость 1 куб. м холодной воды составляет 20 руб. 20 коп.? Ответ дайте в рублях.

Ответ: ___________________________.

3 В летнем лагере 168 детей и 26 воспитателей. В одном автобусе можно перевозить не более 45 пассажиров. Какое наименьшее количество таких автобусов понадобится, чтобы за один раз перевезти всех из лагеря в город?

Ответ: ___________________________.

4 Шоколадка стоит 40 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 170 рублей в воскресенье?

Ответ: ___________________________.

5 Футболка стоила 900 рублей. После снижения цены она стала стоить 684 рубля. На сколько процентов была снижена цена футболки?

Ответ: ___________________________.

6 После уценки телевизора его новая цена составила 0,96 от старой цены. На сколько процентов уменьшилась цена телевизора в результате уценки?

Ответ: ___________________________.

7 Площадь земель фермерского хозяйства, отведённых под посадку сельскохозяйственных культур, составляет 42 га и распределена между зерновыми и техническими культурами в отношении $3:4$ соответственно. Сколько гектаров занимают технические культуры?

Ответ: ___________________________.

8 Длины двух рек относятся как 7 : 8, при этом одна из них длиннее другой на 15 км. Найдите длину большей реки. Ответ дайте в километрах.

Ответ: ___________________________.

9 Семья из трёх человек планирует поехать из Москвы в Чебоксары. Можно ехать поездом, а можно — на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 1840 рублей. Автомобиль расходует 15 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 километров, а цена бензина равна 36 рублей за литр. Сколько рублей придётся заплатить за наиболее дешёвую поездку на троих?

Ответ: ___________________________.

10 При строительстве дома фирма использует один из двух типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 9 тонн природного камня и 8 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 6 тонн щебня и 60 мешков цемента. Тонна камня стоит 1700 рублей, щебень стоит 770 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 240 рублей. Сколько рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешёвый вариант?

Ответ: ___________________________.

11 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1400$ К, $a = -10$ К/мин^2, $b = 200$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Ответ: ___________________________.

12 Наблюдатель находится на высоте h, выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 4 километров? Ответ выразите в метрах.

Ответ: ___________________________.

13 На плане указано, что прямоугольная комната имеет площадь 20 кв. м. Точные измерения показали, что ширина комнаты равна 4,1 м, а длина — 5 м. На сколько квадратных метров площадь комнаты отличается от значения, указанного на плане?

Ответ: ___________________________.

14 Колесо имеет 8 спиц. Углы между соседними спицами равны. Найдите величину наименьшего угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.

Ответ: ___________________________.

15 Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) масса футбольного мяча	1) 18 кг
Б) масса дождевой капли	2) 2,8 т
В) масса взрослого бегемота	3) 20 мг
Г) масса стиральной машины	4) 750 г

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

16 Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ВОЗМОЖНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ
А) площадь города Санкт-Петербурга	1) 420 кв. м
Б) площадь одной стороны монеты	2) 300 кв. мм
В) площадь поверхности тумбочки	3) 1439 кв. км
Г) площадь баскетбольной площадки	4) 0,2 кв. м

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

17 В таблице приведены размеры штрафов за превышение максимальной разрешённой скорости, зафиксированное с помощью средств автоматической фиксации, установленных на территории России с 1 сентября 2013 года.

Превышение скорости, км/ч	21–40	41–60	61–80	81 и более
Размер штрафа, руб.	500	1000	2000	5000

Какой штраф должен заплатить владелец автомобиля, зафиксированная скорость которого составила 103 км/ч на участке дороги с максимальной разрешённой скоростью 60 км/ч. Ответ дайте в рублях.

Ответ: ___________________________.

18 В таблице представлены налоговые ставки на автомобили в Москве с 1 января 2013 года.

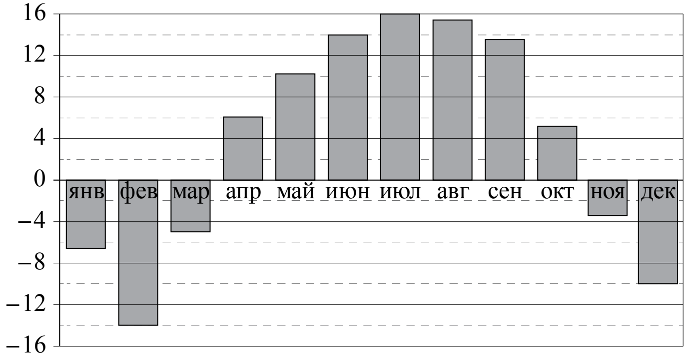
Мощность автомобиля (в л. с.*)	Налоговая ставка (руб. за 1 л. с.* в год)
не более 70	0
71–100	12
101–125	25
126–150	35
151–175	45
176–200	50
201–225	65
226–250	75
свыше 250	150

*л. с. — лошадиная сила

Какова налоговая ставка (в рублях за 1 л. с.) на автомобиль мощностью 178 л. с.?

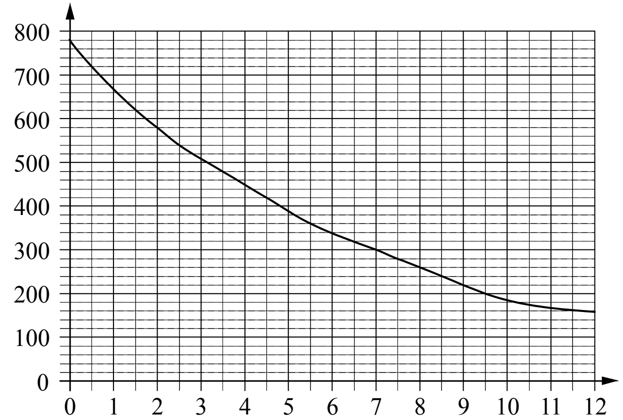
Ответ: ___________________________.

19 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указаны месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

20 На графике изображена зависимость атмосферного давления (в миллиметрах ртутного столба) от высоты над уровнем моря (в километрах). Определите по графику, чему равно атмосферное давление на высоте 2 км. Ответ дайте в миллиметрах ртутного столба.



Ответ: ___________________________.

21 Конкурс исполнителей длится в 5 дней. Всего заявлено 50 выступлений — по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 14 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

Ответ: ___________________________.

22 На семинар приехали 7 учёных из Норвегии, 3 из России и 5 из Испании. Каждый учёный подготовил один доклад. Порядок докладов определяется случайным образом. Найдите вероятность того, что восьмым окажется доклад учёного из России.

Ответ: ___________________________.

23 Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ: ___________________________.

24 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: ___________________________.

25 Хозяйка к празднику купила морс, мороженое, крабовые палочки и рыбу. Мороженое стоило дороже крабовых палочек, но дешевле рыбы, морс стоил дешевле мороженого. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Морс стоил дешевле рыбы.
2) За морс заплатили больше, чем за мороженое.
3) Рыба самая дорогая из покупок.
4) Среди указанных четырёх покупок есть три, стоимость которых одинакова.

Ответ: ___________________________.

26 Двадцать выпускников одного из одиннадцатых классов сдавали ЕГЭ по обществознанию. Самый низкий полученный балл был равен 36, а самый высокий — 75. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Среди этих выпускников есть человек, который получил 75 баллов за ЕГЭ по обществознанию.
2) Среди этих выпускников есть двадцать два человека с равными баллами за ЕГЭ по обществознанию.
3) Среди этих выпускников есть человек, получивший 20 баллов за ЕГЭ по обществознанию.
4) Баллы за ЕГЭ по обществознанию любого из этих двадцати человек не ниже 35.

Ответ: ___________________________.

Запишите полное обоснованное решение и ответ к каждому из заданий 27 и 28.

27 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 1,25 млн рублей?

28 Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара.
За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит каждому рабочему 500 рублей.
Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Ответы к заданиям с кратким ответом

Практико-ориентированные задания

№ задания	Ответ
1	458
2	323,2
3	5
4	6
5	24
6	4
7	24
8	120
9	3780
10	17220
11	2
12	1,25
13	0,5
14	45
15	4321
16	3241
17	1000
18	50
19	16
20	660
21	0,18
22	0,2
23	0,08
24	0,0296
25	13
26	14

Решения и критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

27 В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 1,25 млн рублей?

Решение.
Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$9,\ \frac{9(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{9\cdot 2}{n},\ \frac{9}{n},\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 25%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$11{,}25,\ \frac{11{,}25(n-1)}{n},\ \ldots,\ \frac{11{,}25\cdot 2}{n},\ \frac{11{,}25}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$2{,}25+\frac{9}{n},\ \frac{2{,}25(n-1)+9}{n},\ \ldots,\ \frac{2{,}25\cdot 2+9}{n},\ \frac{2{,}25+9}{n}.$$

Получаем: $\frac{11{,}25}{n}=1{,}25$, откуда $n=9$. Значит, всего следует выплатить

$$9+2{,}25\left(1+\frac{8}{9}+\ldots+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)=9+2{,}25\cdot 5=20{,}25 \text{ (млн рублей).}$$

Ответ: 20,25 млн рублей.

28 Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.
Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение.
Допустим, что на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся x^2 часов, а на заводе, расположенном во втором городе, — y^2 часов. Тогда в неделю будет произведено $3x+4y$ единиц товара, а затраты на оплату труда составят $500\left(x^2+y^2\right)$ рублей. В этом случае нужно найти наибольшее значение $Q=3x+4y$ при условии $500\left(x^2+y^2\right)=5\,000\,000$.
Выразим y через x:

$$x^2+y^2=10\,000;\ y^2=10\,000-x^2;\ y=\sqrt{10\,000-x^2}.$$

Значит, нам нужно найти наибольшее значение функции

$$Q(x)=3x+4\sqrt{10\,000-x^2}$$

при $0\le x\le 100$. Для этого найдём производную функции $Q(x)$:

$$Q'(x)=3-\frac{4x}{\sqrt{10\,000-x^2}}.$$

Найдём точки экстремума:

$$Q'(x)=0;\ 3=\frac{4x}{\sqrt{10\,000-x^2}};$$

$$3\sqrt{10\,000-x^2}=4x;\ 90\,000-9x^2=16x^2;\ x^2=3600,$$

то есть $x=60$ — единственная точка экстремума, удовлетворяющая условию $0\le x\le 100$. Найдём значения функции в найденной точке и на концах отрезка:

$$Q(60)=500,\ Q(100)=300,\ Q(0)=400.$$

Наибольшее значение $Q(x)$ равно 500, значит, наибольшее количество единиц товара равно 500.
Ответ: 500.

Критерии оценивания заданий 27 и 28

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3